

既約分解表現を用いた制御系に対する強安定率の概念

矢 納 陽*・見 浪 護*・松 野 隆 幸*

Strong Stability Rate for Control Systems Using Coprime Factorization

Akira YANOU*, Mamoru MINAMI* and Takayuki MATSUNO*

This paper proposes concept of strong stability rate for control systems using coprime factorization. Strong stability rate can be used as one of the safety indices and a design method of strongly stable systems.

Key Words: strong stability rate, coprime factorization, closed-loop characteristic

1. はじめに

安全性の観点から、制御系は補償器自身も安定な強安定系が望ましいと考えられる。これまで著者らは既約分解表現を用いて強安定系の構成法を提案してきた^{1),2)}が、フィードバックによって入力側に戻されていた信号が0になった強安定系における開ループ応答は、定常値に落ち着くものの目標値から大きくずれる場合があり、この状態は安定であるが安全とはいえない。また、前述の状況に対して、ある条件のもとで制御量の定常値を目標値に一致させる手法を提案している³⁾が、その条件が成り立たない場合にはこの手法の適用はできなかった。

これらの問題に対し著者らは研究を進めている^{4),5)}が、上述の安全性に関する指標と設計手法を独立には与えていなかった。そこで本論文では、強安定系が構成できているという前提のもとで、フィードバックによって入力側に戻されていた信号が0になった場合における閉ループ系と開ループ系の定常ゲインの比を強安定率として定義し、新しく導入するパラメータによって提案する強安定率が調整できることを示す。

以下、2章で既約分解表現を用いた制御系の表現方法と強安定系について述べ、3章では強安定系が構成されたという前提のもとで、閉ループ系と開ループ系の定常ゲインの比を用いて強安定率を定義し、安全性を表わす指標の一つとして提案するとともに、制御系設計に利用できることを示す。最後に4章でまとめを行なう。

注意 z^{-1} で時間遅れ $z^{-1}y(t) = y(t-1)$ を表わす。また、 z^{-1} の多項式を $A[z^{-1}]$ 、有理関数を $A(z^{-1})$ のように括弧 $[\]$ と $(\)$ を用いて区別する。さらに伝達関数の定常ゲインは、時間による信号の変化がないと考え $z^{-1} = 1$ を代入して計算する。

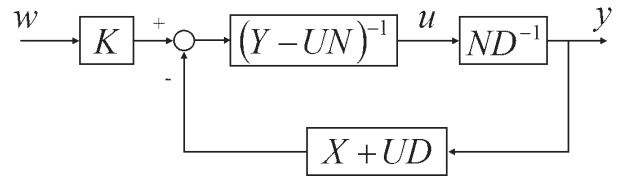


Fig. 1 Closed-loop system in RH_∞

2. 既約分解表現を用いた制御系の表現

まず、伝達関数を既約分解表現するために以下の安定有理関数の族 RH_∞ を考える。

$$RH_\infty = \{G(z^{-1}) = \frac{G_n[z^{-1}]}{G_d[z^{-1}]}, G_d[z^{-1}]: \text{安定多項式}\}$$

つぎに、制御対象の伝達関数 $G(z^{-1})$ を以下のように既約分解する。

$$\begin{aligned} y(t) &= G(z^{-1})u(t) \\ &= N(z^{-1})D^{-1}(z^{-1})u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $y(t)$ は出力、 $u(t)$ は入力であり、 $N(z^{-1})$ 、 $D(z^{-1})$ は RH_∞ に属するものとする。また、本論文では安定な制御対象のみを扱うものとする。

$X(z^{-1})$ 、 $Y(z^{-1})$ を以下の Bezout 等式の解とおく。

$$X(z^{-1})N(z^{-1}) + Y(z^{-1})D(z^{-1}) = 1 \tag{2}$$

ただし $X(z^{-1}), Y(z^{-1}) \in RH_\infty$ である。このとき (1)、(2) 式よりすべての安定化補償器は設計パラメータを $U(z^{-1})$ 、 $K(z^{-1}) \in RH_\infty$ として以下の形で与えられる⁶⁾。

$$u(t) = C_1(z^{-1})w(t) - C_2(z^{-1})y(t) \tag{3}$$

$$C_1(z^{-1}) = (Y(z^{-1}) - U(z^{-1})N(z^{-1}))^{-1}K(z^{-1}) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} C_2(z^{-1}) &= (Y(z^{-1}) - U(z^{-1})N(z^{-1}))^{-1} \\ &\quad \cdot (X(z^{-1}) + U(z^{-1})D(z^{-1})) \end{aligned} \tag{5}$$

ここで $w(t)$ は目標値信号を表わす。また、この安定化補償器によって与えられる系を Fig. 1 に示す。以下では表記を簡単化するため、特に断りのない限り (t) および (z^{-1}) を省略する。

* 岡山大学大学院自然科学研究科 岡山市北区津島中 3-1-1
* Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University, 3-1-1 Tsushimanaka, Kita-ku, Okayama
(Received August 2, 2013)
(Revised December 27, 2013)

(3), (4), (5) 式を (1) 式に代入すると, 閉ループ伝達関数は以下のように与えられる.

$$y = ND^{-1}(Y - UN)^{-1}Kw - ND^{-1}(Y - UN)^{-1}(X + UD)y \quad (6)$$

これを整理して y についてまとめると

$$\{D(Y - UN) + N(X + UD)\}y = NKw \quad (7)$$

すなわち

$$(XN + YD)y = NKw \quad (8)$$

(2) 式より, 閉ループ系は以下で表わすことができる.

$$y = NKw \quad (9)$$

ここで, 定値制御を考えた補償器が設計されていれば, 十分に時間が経過した後, 出力 y が目標値 w に追従する. すなわち, 閉ループ系 (9) の定常ゲインは $N(1)K(1) = 1$ となるよう構成されている. また, 安定化補償器 (3) の設計パラメータ U は閉ループ系 (9) に影響を与えないこともわかる. このことから, 安定な閉ループ系を設計し, 既約分解表現を利用して拡張したコントローラが安定となるよう設計パラメータ U を選べば強安定系が構成できる.

3. 強安定率の提案

3.1 強安定率の定義

(3) 式と (9) 式から, 設計パラメータ U を利用すれば, 閉ループ系の特性を変えることなく補償器の特性 (ここでは補償器の極のみ着目する) を変えることができる. これまで著者らは, U を選定して補償器を安定化することで強安定系が構成できることを示し, フィードバックによって入力側に戻されていた信号が 0 になったとしても, その閉ループ系の定常ゲインが閉ループ系の定常ゲイン $N(1)K(1)$ と等しくなる U の条件式を提案した³⁾が, 計算された U が安定な補償器とならず, 強安定系を構成できない場合があった. いい換えれば, U に課された条件が厳しかったといえる. そこで本章ではこの条件を緩和し, 強安定系が構成できているという前提のもとで, 閉ループ系と開ループ系の定常ゲインがどれだけ近いかということを安全性の指標の一つとして考え, これを強安定率として提案する. まず, Fig.1 で与えられた閉ループシステムにおいて, フィードバックによって入力側に戻されていた信号が 0 になったとすると, 補償器 (3) はつぎのように与えられる.

$$u = (Y - UN)^{-1}Kw \quad (10)$$

これを (1) 式に代入すると, 目標値 w から出力 y への開ループ伝達関数は以下で与えられる.

$$y = ND^{-1}u = ND^{-1}(Y - UN)^{-1}Kw$$

$$= (YD - UND)^{-1}NKw \quad (11)$$

すると $YD = 1 - XN$ なのでつぎのように書くことができる.

$$y = (1 - XN - UND)^{-1}NKw = \{1 - (X + UD)N\}^{-1}NKw \quad (12)$$

よって, この開ループ系の定常状態はつぎのように与えられる.

$$y = \{1 - (X(1) + U(1)D(1))N(1)\}^{-1}N(1)K(1)w \quad (13)$$

(9), (13) 式より閉ループ系と開ループ系の定常ゲインの比を強安定率として s とおくと以下の式を得る.

$$s = \frac{\{1 - (X(1) + U(1)D(1))N(1)\}^{-1}N(1)K(1)}{N(1)K(1)} = \{1 - (X(1) + U(1)D(1))N(1)\}^{-1} \quad (14)$$

すなわち, 強安定率 s は開ループ系の定常ゲインそのものとなり, 本研究ではこれを強安定率として定義する. もし $s = 1$ であれば, フィードバックによって入力側に戻されていた信号が 0 になったとしても開ループ系の定常ゲインは閉ループ系のものと一致し, 定常状態において出力は目標値に一致する. この場合, 本研究においては系が最も安全であることを意味する. 一方, $s \neq 1$ であれば, 定常状態における開ループ系の出力が目標値からずれることを意味している. このずれが大きいくほど, 水位制御系における液あふれや温度制御系における異常な温度上昇の可能性がある. まとめて, 強安定率 s は 1 の場合に最もよく, そこからのずれが大きいくほど安全性が損なわれることを意味している. なお, 前述のとおりこの指標は設計パラメータ $U(1)$ によって強安定系が構成できているという前提に基づくことに注意する必要がある. 以下では $U(1)$ の与え方について簡単に考察を行なう.

3.2 $U(1)$ の与え方

これまで著者らは参考文献 3) において安定化補償器 (3) の設計パラメータを $U(1) = -D^{-1}(1)X(1)$ のように与えていたが, $D(1)$ や $X(1)$ の値によっては強安定系を構成できない場合があった. そこで α を任意の定数として $U(1)$ をつぎのように与えることを考える.

$$U(1) = -\alpha D^{-1}(1)X(1) \quad (15)$$

すると (14) 式はつぎのように変形できる.

$$s = \{1 - (X(1) - \alpha D^{-1}(1)X(1)D(1))N(1)\}^{-1} = (1 - X(1)N(1) + \alpha X(1)N(1))^{-1} = (\alpha X(1)N(1) + Y(1)D(1))^{-1} \quad (16)$$

ここで $Y(1)D(1) = 1 - X(1)N(1)$ を利用した. (15) 式で $\alpha = 1$ とすれば参考文献 3) における $U(1)$ の与え方と一致する. さらに強安定系が構成できているならば, (2) 式より $s = 1$ となることがわかる. 一方, $\alpha = 1$ とおいて強安定系が構成できなければ, 補償器 (3) を安定にする α を選定する必要がある. このとき, 強安定率 s は 1 とはならず, フィードバック

Table 1 Relation among $U(1)$, s and absolute values of controller's poles

$U(1)$	(α)	s	absolute values of controller's poles
0.61	(0.3)	2.02	0.91, 0.11
1.21	(0.6)	1.59	0.88, 0.11
2.02	(1)	1	0.82, 0.13
2.42	(1.2)	0.71	0.79, 0.14
3.03	(1.5)	0.27	0.71, 0.17

によって入力側に戻されていた信号が 0 になった場合の定常状態において、出力が目標値からずれることを意味している。

3.3 数値例

提案する概念の有用性を示すため、簡単に数値例を示す。制御対象としてつぎのものを考える。

$$y = \frac{z^{-1}}{1 + 0.9z^{-1}}u$$

安定多項式を $T = 1 + 0.7z^{-1} - 0.08z^{-2}$ と選ぶものとし、 N , D をそれぞれ以下で与える。

$$N = \frac{z^{-1}}{1 + 0.7z^{-1} - 0.08z^{-2}}$$

$$D = \frac{1 + 0.9z^{-1}}{1 + 0.7z^{-1} - 0.08z^{-2}}$$

このとき Bezout 等式 (2) の解は $X = -1.3 - 1.07z^{-1}$, $Y = 1 + 1.1z^{-1}$ で与えることができる。すると補償器 (3) によって構成される閉ループ系は (9) 式より安定である。なお、ここでは K は $N(1)K(1) = 1$ を満たすように選ばれているとする。つぎに、強安定系が構成できる範囲で (15) 式に従って $U(1) = -\alpha D^{-1}(1)X(1)$ を与えた結果を **Table 1** に示す。これらの結果は、フィードバックによって入力側に戻されていた信号が 0 になった場合の出力が目標値からどれだけずれるか、 $U(1)$ を選定して与えられた強安定率 s によって定量的に知ることができることを示している。すなわち、安全性の指標の一つとして利用できることがわかる。

4. おわりに

本報告では強安定率の概念について提案するとともに、それが制御系設計に利用できることを示した。今後は強安定率を利用した制御系設計法について検討を進める。

謝辞 査読者の方には大変有益なコメントをいただきました。ありがとうございます。また、本研究は JSPS 科研費 24760337 の助成を受けたものです。

参考文献

- 1) 井上, 矢納, 平嶋: 既約分解表現を用いた強安定セルフチューニングコントローラの構成, システム制御情報学会論文誌, **12**-5, 290/296 (1999)
- 2) A. Yanou, M. Deng and A. Inoue: A Design of a Strongly Stable Generalized Minimum Variance Control Using a Genetic Algorithm, Proc. ICROS-SICE International Joint Conference 2009, 1300/1304 (2009)
- 3) 岡崎, 西崎, 矢納, 見浪, 鄧: 閉ループ特性に着目した強安定予測制御系, 計測自動制御学会論文集, **47**-7, 317/325 (2011)
- 4) 矢納, 見浪, 松野: 既約分解表現を用いた制御系に対する強安

定率の概念の提案, 第 3 回コンピューターショナル・インテリジェンス研究会, 49/53 (2013)

- 5) 矢納, 見浪, 松野: 強安定率を用いたセルフチューニングコントローラの一設計法, 計測自動制御学会システム・情報部門学術講演会 2013, 663/667 (2013)
- 6) M. Vidyasagar: *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, MIT Press (1985)